O selecție internațională de exerciții pentru bacalaureat

ADRIAN MANEA

Poligon Educational & Școala9

adrianmanea@poligon-edu.ro

Exercițiile din examenul de bacalaureat din România sunt aproape standardizate, cu raționamente-șablon, dar și cu multe calcule abstracte, chiar dacă rezultatele sunt, adesea, numere întregi.

Totuși, matematica de liceu are mult mai multe de oferit decât astfel de exerciții și concepte memorate punct cu punct. Profesorii și elevii din țara noastră nu mai insistă suficient pe două aspecte esențiale în *înțelegerea* matematicii: vizualizarea și conceptualizarea.

Am selectat câteva exemple reprezentative în acest sens din examenele de bacalaureat din SUA (SAT), Marea Britanie (IB), Germania (Abitur) și Franța metropolitană. Principalul motiv este să arăt cum ar putea să fie structurat bacalaureatul și la noi, astfel încât elevii să gândească mai mult, deci să înțeleagă mai mult, memorând mai puțin. Am ales, așadar, exerciții după criteriul de „noutate": cât de diferite sunt față de cele din examenul românesc.

De menționat că substratul matematic al tuturor celor zece exerciții se încadrează foarte bine în materia care se studiază și în țara noastră. Cu alte cuvinte, elevii români ar trebui să știe deja teoria necesară. Singura întrebare este dacă au înțeles-o suficient de bine încât să fie flexibili în aplicarea ei.

Exercițiile de aici însoțesc articolul de analiză pe care l-am publicat la Școala9, pe care îl puteți citi pe pagina mea de colaborator al revistei.

1. Figura de mai jos reprezintă graficul funcției $y = f(x)$. Graficul are o asimptotă orizontală $y = -1$ și se intersectează cu axa OX la $x = -1$ și $x = 1$, iar cu axa OY la $y = 2$.

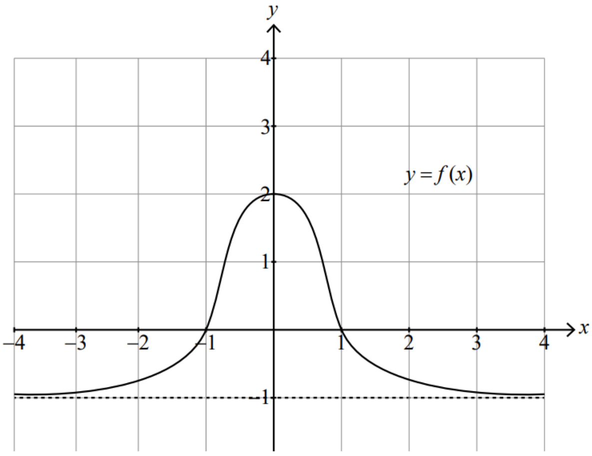

Figura 1: Graficul funcției din exercițiul 1

Într-un sistem de coordonate similar, schițați graficul pentru $y = (f(x))^2 + 1$ și arătați asimptotele, cu ecuațiile corespunzătoare, precum și coordonatele punctelor de minim sau de maxim local, dacă există.

International Baccalaureate, 2025

2. Fie funcția definită pe $\mathbb{R}$ prin $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - 3x$.
Care dintre cele două grafice din figura 2 reprezintă primitiva lui f?

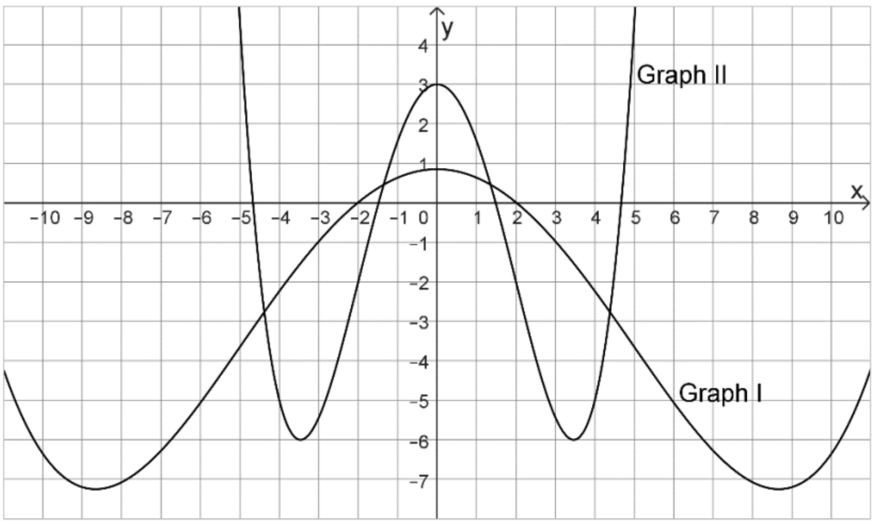

Figura 2: Graficul pentru exercițiul 2

Abitur (Bacalaureat Germania) Berlin, 2025

3. Graficul din figura de mai jos reprezintă relația dintre două variabile, x și y.

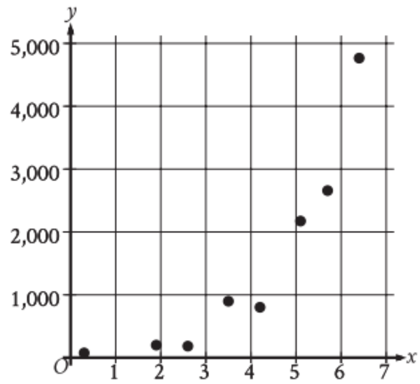

Figura 3: Graficul din exercițiul 3

Care dintre cele patru reprezentări grafice din figura 4 este un model potrivit pentru datele respective?

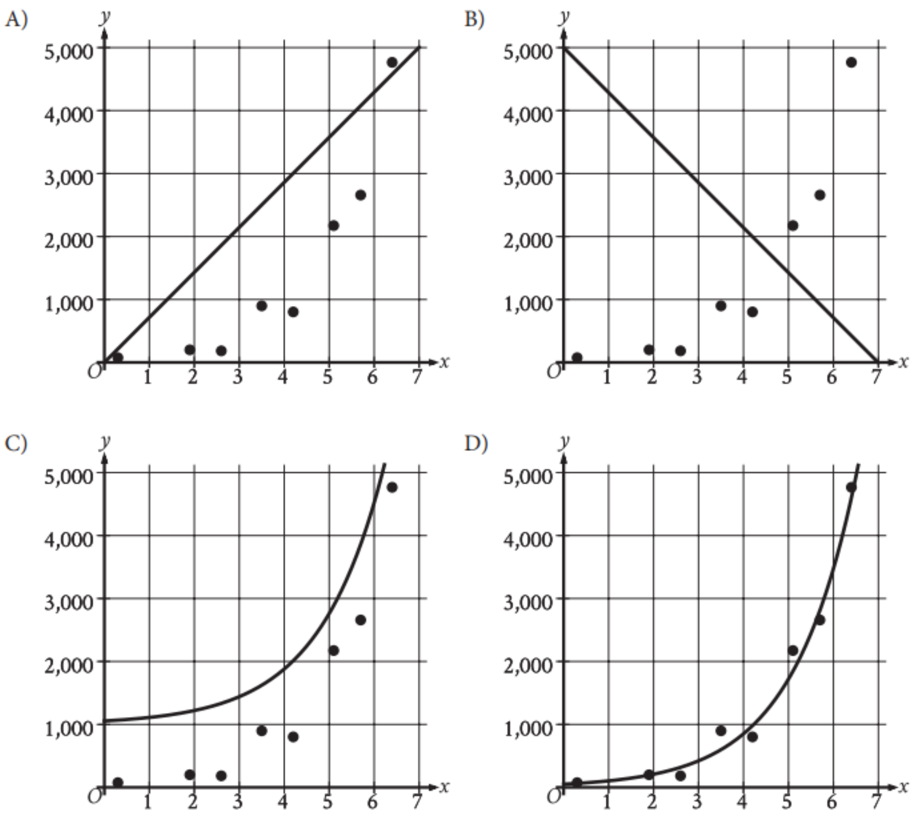

Figura 4: Variantele de răspuns pentru exercițiul 3

SAT, 2025

4. Funcția $P(t) = 1800 \cdot (1,02)^t$ estimează numărul de mamifere marine dintr-o zonă, unde t este numărul de ani de la începerea studiului acestei populații. Care este cea mai potrivită interpretare a valorii $P(0) = 1800$ în acest context?

(A) Numărul estimativ de mamifere marine a fost de 102 la începerea studiului.

(B) Numărul estimativ de mamifere marine a fost de 1800 la începerea studiului.

(C) Numărul estimativ de mamifere marine din zonă crește cu 102 în fiecare an pe durata studiului.

(D) Numărul estimativ de mamifere marine din zonă crește cu 1800 în fiecare an pe durata studiului.

SAT, 2025

5. Funcția f, definită prin $f(t) = 14t + 9$, estimează înălțimea, în centimetri, a unui arbust de viță de vie la t luni după ce a fost plantată de un fermier. Care este cea mai potrivită interpretare a lui 9 în acest context?

(A) Fermierul va păstra vița de vie timp de 9 luni.

(B) Arbustul va crește, estimativ, 9 centimetri în fiecare lună.

(C) Arbustul se așteaptă să crească până la o înălțime maximă de 9 centimetri.

(D) Înălțimea aproximativă a arbustului la cumpărare a fost de 9 centimetri.

SAT, 2025

6. În graficul din figura de mai jos este reprezentată expresia $y = 2x^2 + bx + c$, unde b și c sunt constante. Care este valoarea produsului bc?

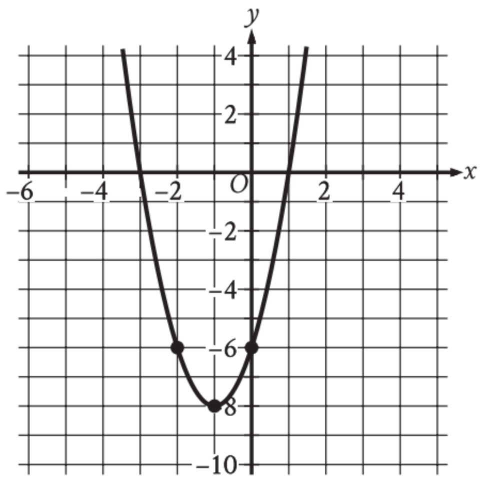

Figura 5: Graficul pentru exercițiul 6

SAT, 2025

7. Definim funcția $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5, x \in \mathbb{R}, x \leq a$. Graficul $y = f(x)$ este reprezentat în figura 6.

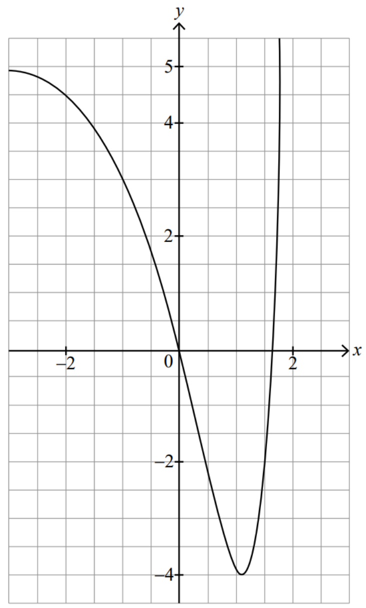

Figura 6: Graficul pentru exercițiul 7

(a) Găsiți cea mai mare valoare a lui a pentru care funcția f are o inversă.

(b) Pentru această valoare a lui a, găsiți expresia lui $f^{-1}(x)$, precizându-i și domeniul de definiție.

International Baccalaureate, 2025

8. Pentru toate numerele naturale n, se notează cu u_n suprafața, în hectare, acoperită de alge la data de 1 iulie a anului $2024 + n$. De asemenea, considerăm $u_0 = 1$.

Un studiu al acestei suprafețe a permis modelarea prin formula:

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Calculați suprafața acoperită de alge la 1 iulie 2025, conform acestui model.

(b) Fie h funcția definită pe $[0, 20]$ prin $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$. Presupunem cunoscut faptul că h este crescătoare pe intervalul $[0, 20]$.

(i) Demonstrați că, pentru toți $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

(ii) Deduceți că șirul (u_n) este convergent. Fie L limita sa.

(iii) Arătați că $L = 15$.

(c) Biologii vor să știe dacă suprafața acoperită cu alge va depăși 14 hectare. *Fără a face vreun calcul* justificați că acest model răspunde afirmativ.

Bacalaureat Franța metropolitană, 2025

9. Ne interesează variația indicelui glicemic al unei persoane după masă. Glicemia, calculată în grame pe litru (g/L), în funcție de timpul t, exprimat în ore care a trecut după masă, este modelată de funcția:

$$f : [0,6] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = (t+1)e^{-0,4t}.$$

(a) (i) Arătați că, pentru orice $t \in [0,6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}$.

(ii) Studiați variația funcției f pe domeniul de definiție, cu ajutorul tabelului de variație.

(b) O persoană este hipoglicemică dacă are glicemia sub $0,7$ g/L.

(i) Arătați că, pe intervalul $[0,6]$, ecuația $f(t) = 0,7$ are o soluție unică, notată cu α.

(ii) După cât timp de la masă este o persoană în hipoglicemie? Exprimați răspunsul în minute.

(c) Vrem să determinăm glicemia medie, în g/L, a unei persoane pe parcursul celor 6 ore după masă.

(i) Cu ajutorul integrării prin părți, arătați că $\int_0^6 f(t)dt = -23,75e^{-2,4} + 8,75$.

(ii) Calculați glicemia medie, în g/L, a unei persoane pe parcursul celor 6 ore după masă.

Bacalaureat Franța metropolitană, 2025

10. Fie funcția definită pe $\mathbb{R}$ prin $f(x) = 5xe^{-x}$. Imaginea graficului G este reprezentată în figura 7.

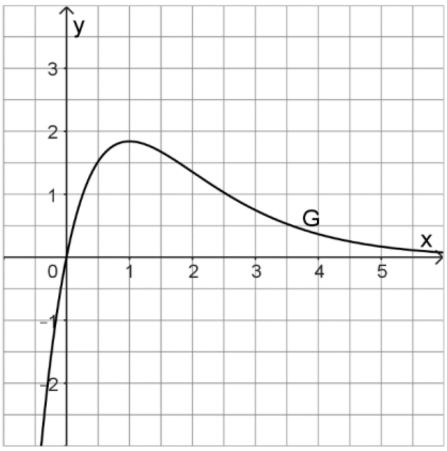

Figura 7: Graficul funcției de la exercițiul 10

(a) Ecuația tangentei t în punctul de inflexiune este $y = -\frac{5}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$. Găsiți ecuația perpendicularei pe această tangentă, în punctul de inflexiune.

(b) Considerăm restricția funcției f pe intervalul $[1, \infty)$, pe care o notăm $h(x)$. Justificați că funcția f nu este inversabilă, dar funcția h este. Găsiți domeniul de definiție și codomeniul pentru funcția h^{-1}.

(c) Graficul din figura 8 a fost obținut astfel:

- Dreapta $y = 5$ este marginea superioară;
- Curba H_1 a fost obținută prin oglindirea graficului G în $y = x$, pentru $x \in [\ln 5, 5]$;

- Curba H_2 a fost obținută prin oglindirea lui H_1 în dreapta cu ecuația $x = \ln 5$;
- Punctul $S(\ln 5, 5)$ este intersecția lui H_1 cu H_2.

(d) Explicați de ce formula de mai jos calculează aria suprafeței închise din figura 8:

$$2 \cdot \left((5 - \ln 5) \cdot \ln 5 - \int_{\ln 5}^{5} f(x)dx \right).$$

(e) Fie $F(x) = -5(x+1) \cdot e^{-x}$ o primitivă a lui f. Calculați aria de la cerința anterioară.

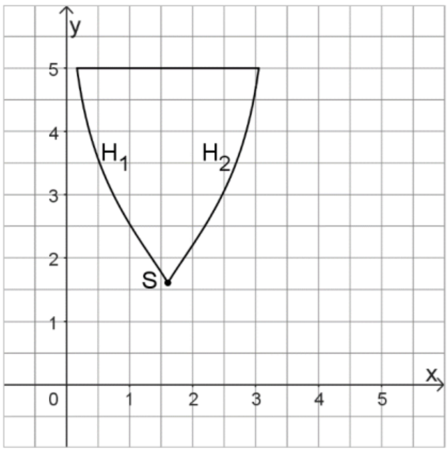

Figura 8: Suprafața pentru problema 10 (d)

Abitur (Bacalaureat Germania) Berlin, 2025