Ce este dx?
Despre infinitul mic

Adrian Manea

La începutul lecțiilor de analiză din clasa a douăsprezecea, ai aflat despre operația inversă derivării: integrarea. Ca să găsești primitiva unei funcții reale f, te întrebi *„Ce funcție trebuie să derivez ca să obțin pe f?”* De exemplu, dacă derivezi funcția $f(x) = x^2$, obții $f'(x) = 2x$, așa că, invers, în termeni de primitive, ai $\int 2xdx = x^2 + \mathcal{C}$.

În scrierea și calculul primitivelor, sunt două detalii care par neobișnuite, mai ales la prima vedere.

- *Ce rol are constanta care se adaugă la final de fiecare dată?*
- *De ce trebuie să scriu ceva suplimentar, acel dx, care nici nu e clar ce este, dacă eu calculez primitiva funcției $2x$?*

Prima întrebare are un răspuns simplu, care vine din regulile de derivare. $\mathcal{C}$-ul de la final înseamnă, de fapt, *orice (funcție) constantă* sau *mulțimea funcțiilor constante*, pentru că orice două primitive ale aceleiași funcții pot să difere printr-o constantă.

De exemplu, fie că derivezi funcția $f_1(x) = x^2$ sau funcția $f_2(x) = x^2 + \pi$ sau funcția $f_3(x) = x^2 - 1$, obții același lucru de fiecare dată: $2x$. Rezultă că toate cele trei funcții, f_1, f_2, f_3 sunt primitive pentru $2x$. Și atunci, pe care o alegi? Nu ai niciun motiv să dai o prioritate sau alta, așa că *toate trei sunt la fel de bune*. Sau, altfel spus: oricare dintre ele și multe altele, toate sub forma $2x$ + orice constantă. De aceea, ca să cuprinzi toate răspunsurile posibile, se scrie $\int 2xdx = x^2 + \mathcal{C}$.

Dacă nu apar specificații suplimentare, cum ar fi să se ceară primitiva F a funcției f care are proprietatea că $F(1) = 1$, atunci păstrezi răspunsul general: orice constantă e la fel de bună, iar calculul returnează, de fapt, *mulțimea primitivelor funcției* f. Pentru cazul când ai o valoare particulară, ca $F(1) = 1$, găsești precis *primitiva*: $F(1) = 1^2 + \mathcal{C} = 1 \Rightarrow \mathcal{C} = 0$, deci $F(x) = x^2$ și atât. O singură primitivă în loc de mulțimea primitivelor.

Pentru întrebarea a doua, însă, facem o excursie istorică, filosofică și științifică spre una dintre cele mai importante noțiuni din matematică, științe și filosofie: infinitul.

Mai multe tipuri de infinit

La baza calculului primitivelor unei funcții și chiar când calculezi integrala definită, cu interpretarea ei ca arie, nu te-ai aștepta să găsești o discuție milenară despre infinit, nu? Mai ales dacă te gândești la interpretarea geometrică a integralei definite, cu aplicațiile sale în calculul ariei sau al volumului, rezultatul pare cât se poate de finit.

Surpriza vine chiar din modul în care înțelegi acest concept. În istoria gândirii, cu mult înainte de apariția științei riguroase, oamenii s-au raportat la infinit ca la o imensitate fără margini. Ceea ce este complet natural, pentru că dacă te întrebi ce imagine îți vine în minte atunci când spui „infinit", cel mai probabil faci aceleași asocieri pe care le-au făcut și oamenii antichității: universul (cerul), timpul sau Dumnezeu.

Problema infinitului era, într-un fel, legată automat de cea a continuității și a existenței atomilor. Dacă acceptăm că există atomi (nu neapărat în sensul fizic de astăzi, ci cu înțelesul de unități indivizibile, care există fizic sau doar conceptual), atunci avem o imagine concretă a infinitului ca totalitatea atomilor din univers. Nu mai e nevoie să spunem că universul este infinit, ci precizăm că numărul total de atomi din univers este infinit.

În secolul al patrulea înaintea erei noastre, Aristotel propune, însă, *două tipuri de infinit*. Ideea că universul sau timpul ar fi infinite, de exemplu, poate fi înțeleasă în două moduri. Dacă accepți că există atomi, atunci totalitatea unităților (atomilor) care alcătuiesc spațiul sau timpul sunt nenumărate, „în număr infinit". Însă dacă atomii nu există, înseamnă că orice fragment poate fi făcut și mai mic, și mai mic, și mai mic... Adică poate fi micșorat sau divizat *la infinit*. De aici, ideea lui Aristotel că infinitul se prezintă sub două variante:

- *infinitul în adunare*, când poți să adaugi fără sfârșit, cum este cazul numerelor naturale: la oricare dintre ele ai vrea să te oprești, mai poți adăuga 1 și obții tot un număr natural;

- *infinitul în diviziune*, când poți să fragmentezi fără sfârșit, cum este cazul unui interval de numere reale: între oricare două numere reale se află încă unul.

Pentru că primul tip de infinit se leagă direct de mulțimea numerelor naturale, el stă la baza principiului inducției. O mulțime se numește *inductivă* dacă, oricând conține un element, conține și pe succesorul său, definit specific. De exemplu, pentru numere naturale, succesorul înseamnă următorul, adică numărul obținut prin adunarea cu 1.

Mulțimea numerelor naturale este o mulțime inductivă, fiindcă este suficient să pornești cu 0 și cu funcția succesor $S(x) = x + 1$. Construcția care rezultă este întreaga mulțime a numerelor naturale, care este infinită sau, în sensul lui Aristotel, *infinită în adunare*.

Dar pentru scopurile de aici, ne interesează mai mult infinitul în diviziune, legat direct de numerele reale. Faptul că între orice două numere reale poți să mai găsești încă un număr real se numește proprietatea de *densitate* a mulțimii numerelor reale. În particular, ea îți permite să faci un interval (a, b) oricât de mic din punctul de vedere al lungimii, adică al diferenței $b - a$. Celebrul ε pe care l-ai întâlnit în definițiile din clasa a unsprezecea era înțeles în acest sens: *oricât de mic*, adică mai mic decât orice număr real ai putea fixa.

Așadar, mulțimea numerelor naturale este infinită în adunare, în sensul că orice număr ai alege, *oricât de mare*, tot mai găsești pe succesorul său în mulțime. Iar numerele reale sunt cadrul potrivit pentru infinitul în diviziune, pentru că orice interval (a, b) ai alege, cu diferența $b - a$ *oricât de mică*, încă mai există un număr real $c \in (a, b)$.

Infinitezimalul

Infinitul în diviziune este conceptul care conduce la „infinitul mic”, numit și *infinitezimal*. Când spun că putem face intervalul (a, b) oricât de mic, de fapt mă refer la o limită de forma:

$$\lim_{a \to b}(b - a).$$

Însăși definiția conceptului de limită se bazează pe asta: diferența $b - a$ este *arbitrar de mică* atunci când a tinde către b.

Pentru o astfel de situație, în jurul secolului al XVII-lea, Gottfried W. Leibniz și Isaac Newton au propus o notație aparte, pentru că apare foarte des, atât în calculul derivatelor, cât și al integralelor — practic, în toată analiza matematică, la care amândoi au contribuit enorm. Au introdus *notația diferențială*, prin care dM înseamnă o variație oricât de mică a mărimii M. Cum ar fi $dx = \lim_{x \to x_0}(x - x_0)$.

În liceu, noțiunea apare mai întâi la fizică, atunci când vrei să calculezi variații instantanee. De exemplu, viteza medie a unui corp o calculezi prin raportul $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, unde ΔM, pentru o mărime M, arată o simplă diferență între valoarea finală și valoarea inițială, între două momente de referință. Însă un astfel de calcul arată doar o variație de ansamblu, nu-ți permite să afli ce se întâmplă momentan. În cazul cel mai rău, când ai o mărime care variază periodic, se poate să nimerești valori egale și la început, și la finalul intervalului și atunci, pare că variația este nulă, deși pe parcurs s-ar fi putut întâmpla multe.

De aceea, calculul instantaneu înseamnă să presupui că momentele inițial și final sunt aproape identice sau altfel spus, că $\Delta t \to 0$, adică $t_{\text{inițial}} \to t_{\text{final}}$. Însă asta înseamnă tocmai infinitezimalul despre care am vorbit, adică:

$$\lim_{t_{\text{inițial}} \to t_{\text{final}}} \left(t_{\text{final}} - t_{\text{inițial}}\right) = dt.$$

Corespunzător, pentru un astfel de interval de timp infinitezimal, și variația poziției o să fie infinitezimală, adică $\Delta x \to dx$. Rezultă că raportul care calcula viteza medie acum calculează o viteză instantanee, pe care o notez simplu cu v:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Dar asta este chiar definiția pentru derivata funcției $x(t)$, sub o altă notație, pentru că:

$$x'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Situația nu este o coincidență, pentru că, mai ales în fizică, întâlnești adesea derivatele notate ca raport de diferențiale. Este, într-un fel, notația mai explicită, pentru că îți arată că derivata înseamnă, concret, un raport de variații infinit de mici. Astfel, $f'(x) = \frac{df}{dx}$, unde nu mai este neapărat necesar să pui și argumentul lui f în notația diferențială ($df(x)$), pentru că el se deduce din numitorul raportului.

Acum, cu aceste preliminarii, să-ți arăt rolul lui dx într-o integrală. Suplimentar, o să înțelegi mai bine și metoda schimbării de variabilă pentru calculul integralelor definite.

dx-ul din integrale

Poate ai auzit una dintre explicațiile pragmatice, că dx-ul de la integrală îți arată unde se termină integrala sau că îți arată care este variabila în raport cu care integrezi, în cazul în

care ai o funcție care conține parametri.

Prima „explicație” este aproape o glumă, pentru că unii fizicieni (și nu numai) pun diferențiala la începutul integralei, adică scriu $\int dx\, x^2 + 5$, de exemplu. Oricât ți s-a explicat la clasă că diferențiala trebuie scrisă la final, argumentele riguroase nu sunt de acord. O notație de forma $\int f(x)\, dx$ înseamnă, concret, integrală din $f(x)$ *înmulțit cu* dx. Și, cum înmulțirea este comutativă, este la fel de corect să scrii și $\int dx\, f(x)$.

A doua „explicație” merită luată în seamă, totuși, pentru că, într-adevăr, poți avea de calculat primitiva unei funcții cu parametri, de forma $f_m(x) = mx^2+2x+3$. Dacă integrezi în raport cu x, adică scrii $\int f_m(x)\, dx$, obții un rezultat, care este diferit de integrarea în raport cu m, adică de $\int f_m(x)\, dm$.

$$\int mx^2 + 2x + 3dx = \frac{mx^3}{3} + x^2 + 3x + \mathcal{C}$$
$$\int mx^2 + 2x + 3dm = \frac{m^2x^2}{2} + 2mx + 3m + \mathcal{C}.$$

Iar când vei ajunge să studiezi funcții de mai multe variabile, devine chiar esențial să știi care este variabila de integrare. De pildă, $\int x + y\, dx$ și $\int x + y\, dy$ sunt două integrale complet diferite și ambele au sens, pentru scopuri diferite.

Acum pentru rolul exact al lui dx. O să-ți explic atât în cazul primitivelor (integralelor nedefinite), cât și pentru integrale definite (Riemann). Prima situație este o formalitate, a doua are o interpretare grafică.

În primitive

Cel mai important lucru de reținut aici este că operația de integrare este inversa operației de derivare. Altfel spus, integrala unei funcții derivate este egală cu derivarea unei funcții integrate și ambele sunt egale cu funcția respectivă. În simboluri:

$$\int f'(x)\, dx = \left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x), \forall x.$$

Însă mai sus ți-am arătat că o altă notație pentru $f'(x)$ este raportul $\frac{df}{dx}$. Dacă înlocuiești

scrierea asta în primul membru al egalității anterioare ai:

$$\int \frac{df(x)}{dx}\,dx = \int df(x) = f(x), \forall x,$$

ceea ce arată exact mecanismul anunțat. Operația de integrare inversează efectul operației de derivare.

Observă că în deducerea acestui fapt, am folosit că $\frac{df(x)}{dx}$ este un simplu raport, așa că am putut simplifica dx.

Acum, în general, când vrei să calculezi $\int f(x)\,dx$, adică primitiva funcției f, îți răspunzi la întrebarea *Ce funcție derivată produce $f(x)$?* Altfel spus, dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}$ și $F'(x) = f(x), \forall x$.

Și această ultimă egalitate poate fi scrisă cu notația diferențială, adică $\frac{dF(x)}{dx} = f(x), \forall x$. Când înlocuiești în integrală, ai:

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int dF(x) = F(x) + \mathcal{C},$$

pentru că rolul integralei este ca operația de *undo* aplicată derivării.

Concluzia este că nu contează dacă pui diferențiala (dx sau dt sau orice altă variabilă de integrare ai) la începutul sau la finalul integralei, dar ea trebuie obligatoriu scrisă. În lipsa ei, integrala pur și simplu nu are sens, pentru că este o operație de inversare a diferențierii aplicată unui obiect matematic care *nu este o diferențială*, ci un raport.

În integrale definite

Știi deja că integrala definită, de la a la b, a unei funcții $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ calculează aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axele de coordonate și verticalele $x = a$ și $x = b$. Dar de ce și cum intervine dx în explicația asta?

Construcția care explică legătura se datorează matematicianului german Bernhard Riemann (1826-1866). Este un exemplu excelent de formulare riguroasă a unei construcții, de altfel, intuitive și care a ajuns să fie foarte importantă în inginerie și informatică, unde calculele aproximative sunt singura șansă când lucrezi cu numere și funcții reale.

O curbă o poți gândi ca fiind alcătuită din fragmente de segment, cu cât mai mici și mai multe, cu atât aproximația este mai bună. Asta înseamnă că aria suprafeței care are una dintre laturi o curbă și celelalte trei laturi drepte se poate aproxima cu o sumă a unor arii de

dreptunghiuri sau trapeze — la fel, cu cât mai multe și mai mici, cu atât aproximația este mai bună.

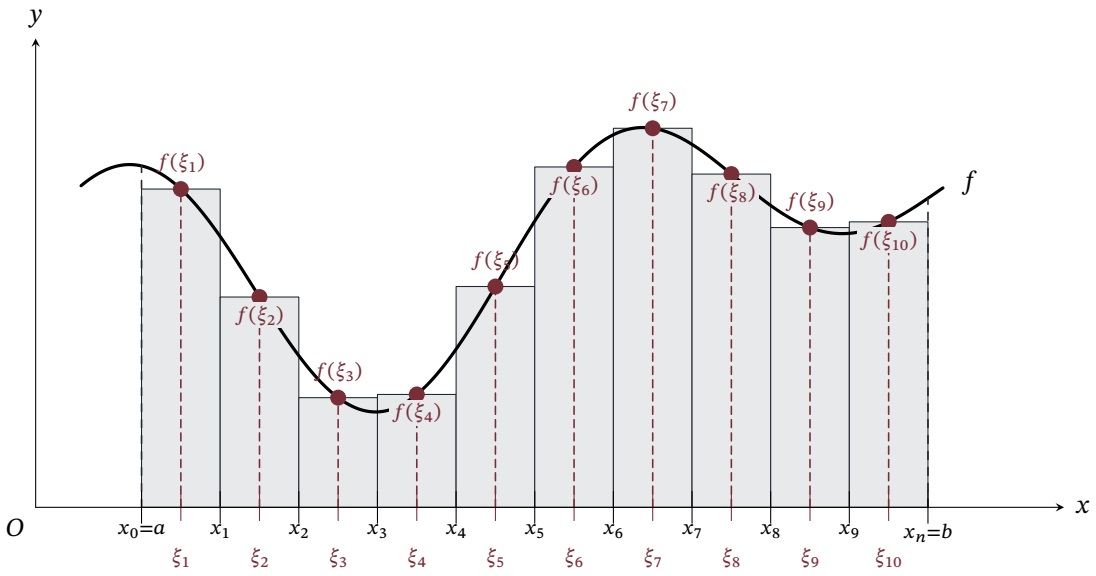


Figura 1: Construcția integralei definite ca arie

Un exemplu de construcție ai în Figura 1, dar sunt și alte elemente care trebuie explicate. Toate în încercarea de a face ca suma ariilor dreptunghiurilor să aproximeze cât mai bine aria suprafeței cu o latură curbă.

Îți explic elementele tehnice, cu referire la desenul din figură. Să zicem că ai de calculat $\int_a^b f(x)\,dx$, deci aria suprafeței delimitate de graficul unei funcții f, axele de coordonate (axa Ox în cazul acesta) și verticalele $x = a$ și $x = b$.

Ca să împarți suprafața în dreptunghiuri, ai nevoie de o *diviziune* a intervalului $[a, b]$, care în manuale se notează cu Δ. Practic, Δ este o mulțime de puncte alese în intervalul $[a, b]$, astfel încât să înceapă cu $x_0 = a$ și să se termine cu $x_n = b$, unde $n + 1$ este numărul total de puncte. Cu cât ai mai multe puncte, cu atât mai bine.

Aceste puncte pot fi luate arbitrar, nu este necesar să fie uniform distribuite, adică distanțele între două puncte consecutive pot fi oricât. Tocmai de aceea, se definește *norma* diviziunii Δ, notată $||\Delta||$, ca fiind cea mai mare distanță dintre două puncte consecutive:

$$||\Delta|| = \max(x_{k+1} - x_k), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Dreptunghiurile care se formează au toate una dintre laturi de lungime calculată sub forma $x_{k+1} - x_k$, cu $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Cealaltă latură poți să o iei pur și simplu $f(x_k)$ sau

$f(x_{k+1})$, dar dacă funcția are variații mari, e posibil să conteze foarte mult ce alegere faci. Tocmai de aceea, se alege încă un punct între x_k și x_{k+1}. Mai precis, se alege un *sistem de puncte intermediare*,

$$\{\xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \dots, \xi_n \in (x_{n-1}, x_n)\},$$

care pot să fie la mijloc sau tot arbitrar.

Ariile dreptunghiurilor se aproximează acum prin produse de tipul $(x_{k+1} - x_k) \cdot f(\xi_{k+1})$.

Dacă calculezi suma tuturor, obții aproximația dorită pentru aria de sub grafic, pe care o notez cu $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\xi_{i+1}).$$

Aria exactă o obții prin trecere la limită, adică atunci când presupui că unele lucruri de aici sunt infinite la număr sau infinit de mici. Mai precis:

- $n \to \infty$, bineînțeles, ca să fii sigur că iei cât de multe puncte e posibil;
- $||\Delta|| \to 0$, astfel încât și în cel mai rău caz, tot ai o latură de tipul $x_k x_{k+1}$ foarte mică.

În aceste ipoteze, suma de mai sus, prin trecere la limită, devine integrala definită, în sens Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty, ||\Delta||\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\xi_{i+1}).$$

Din punctul de vedere al notației, de altfel, semnul de integrală nu este decât un S alungit, care notează o sumă. Iar când ξ_i parcurg toate intervalele din diviziunea Δ, e clar că aproximează parcursul lui x în intervalul $[a = x_0, b = x_n]$.

De unde vine dx? Păi, dacă $||\Delta|| \to 0$, asta înseamnă că și cea mai mare diferență, de forma $x_{i+1} - x_i$ tinde la zero, adică toate $x_i \to x_{i+1}$, ceea ce este întocmai definiția diferențialei: diferența dintre două valori care tind una către cealaltă.

Bonus: Schimbarea de variabilă

Acum pentru rolul diferențialei în metoda de integrare prin schimbare de variabilă, voi folosi un exemplu:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Calculul este foarte simplu, îmi propun doar o explicație tehnică.

Când faci schimbarea de variabilă $t = \ln x$, de fapt introduci o *funcție*, $t(x) = \ln x$. Dacă ai înlocui-o direct așa în primitivă, ai obține:

$$\int \frac{t(x)}{x}\, dx,$$

care e același lucru. Ai făcut doar o notație, ca o scurtătură de tastatură.

Ca să devină o substituție pe care să o și poți folosi, ai nevoie să schimbi și diferențiala, pentru că noua integrală ai vrea să calculeze primitiva funcției t. Trebuie, de aceea, să apară undeva în noua integrală și diferențiala dt.

Tehnica cere să calculezi derivata noii funcții, adică $t'(x) = \dfrac{1}{x}$, ceea ce se poate scrie cu notația diferențială ca $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Cum asta este o simplă egalitate de *fracții*, poți să obții pe dt de aici, $dt = \dfrac{dx}{x}$. Acum:

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} \to \int t \cdot dt.$$

Aici intervine un detaliu tehnic mai dificil, care o să-ți explice și de ce mai sus nu mai avem egalitate, ci o transformare (pe care am notat-o generic prin $\to$).

Singurul mod în care poți evalua această integrală, în care are sens, este să cauți să scrii pe t ca fiind derivata *unei funcții de t, nu de x*, de aceea nu l-am mai scris pe x în $t(x)$ și nici nu s-a mai păstrat egalitatea. Cu alte cuvinte, trebuie să te gândești ce funcție *de t* dă, prin derivare, t, iar răspunsul este $\dfrac{t^2}{2} + \mathcal{C}$.

Riguros, ar trebui să presupunem că există o primitivă a lui t, pe care o notăm cu T, astfel încât $\dfrac{dT(t)}{dt} = t$ și atunci integrala de calculat devine:

$$\int t \cdot dt = \int \frac{dT}{dt} \cdot dt = \int dT = T(t) + \mathcal{C}.$$

Observă că, în final, am ajuns să calculăm primitiva altei funcții față de cea cu care am plecat. Funcția *de t* care prin derivare dă t nu este același lucru cu funcția *de x* care prin derivare dă $\dfrac{\ln x}{x}$. Asta pentru că litera pe care o folosești pentru variabilă este irelevantă, deci, de fapt, comparăm primitiva lui x cu primitiva lui $\dfrac{\ln x}{x}$, care, evident, diferă.

Numai că procedura de schimbare de variabilă are un as în mânecă. Putem face substituția înapoi *ca funcție*. Cu alte cuvinte, $\dfrac{t^2}{2}$ înseamnă, ca funcție, $\dfrac{\ln^2 x}{2}$, care este, într-adevăr, o primitivă pentru $\dfrac{\ln x}{x}$.