Inducția matematică

Maria Kaproș
Poligon Educational
mariakapros@poligon-edu.ro

Concluziile generale pe care le tragi după doar câteva situații particulare sunt, de multe ori, nefondate. Doar pentru că o întâmplare s-a repetat de trei ori nu garantează că și a patra oară o să funcționeze. Iar când este vorba de rezultate matematice, oricum nimic nu poate fi acceptat fără demonstrație.

Inducția matematică este metoda care te ajută exact în astfel de cazuri. Îți dă voie să generalizezi, dar numai după ce ai adunat câteva exemple particulare și un argument pentru comportamentul general. Ea se bazează pe un principiu foarte simplu: dacă ai văzut că o afirmație este adevărată pentru câteva cazuri „de probă”, este suficient să demonstrezi că se păstrează adevărată și când mai adaugi încă un caz. Cum nu ai pus o limită asupra numărului total de cazuri permise, înseamnă că argumentul va fi unul general: o să funcționeze *pentru toate cazurile posibile*.

De multe ori, însă, metoda inducției matematice este studiată la școală cu exemple abstracte și nu este mereu clar că, de fapt, nu funcționează doar în matematică. *Raționamentul inductiv* este o tehnică de argumentare pe care poți să o folosești oricând vrei să ajungi la o concluzie generală după ce ai observat câteva situații particulare. În plus, ea stă la baza multor cercetări și metodei științifice: experimentele din laborator adună date particulare, practice, iar apoi intervine rolul teoriei, care formulează și demonstrează o concluzie generală.

Îți arătăm aici exemple diverse de probleme de matematică pe care să le rezolvi cu metoda inducției, dar îți explicăm și cum poți să folosești tehnica pentru o argumentare și în afara matematicii.

Intuiție

Ești la început de drum, în clasa a noua, iar profesorii și colegii par sau chiar sunt cu toții străini. Probabil te gândești, în primul rând, cum să-ți faci cunoștințe noi, care ar putea să-ți devină prieteni.

Dacă ești extrovertit, e simplu: intuiești cu cine ar fi o idee bună să stai de vorbă și ce să discuți. Știi când să zâmbești, când să dai mâna, când să ajuți.

Dar dacă te împrietenești mai ușor cu o carte, cu un film sau cu un joc video, un zâmbet sau o conversație oricât de scurtă poate să însemne mult, simți că te arunci într-o ecuație cu multe necunoscute. *Cum să mă comport ca să-mi fac prieteni*? E o întrebare la care te gândești să răspunzi.

Poate o să te surprindă, dar metoda științifică are o soluție. Faci o observație, ți-o notezi, iar când crezi că ai găsit o regulă, o scrii și încerci să o demonstrezi prin încă o încercare. Pe măsură ce testezi, aplici și ajustezi regula, constați că ar putea fi de folos în general.

O astfel de procedură nu este numai pentru experimente de cercetare. O să-ți arăt cum funcționează metoda și pentru a-ți face prieteni, dar și pentru exercițiile de matematică.

Mai întâi, pentru scopurile tale de socializare, vrei să fii cât mai abordabil(ă), atent(ă) la discuții, la gesturi și să vorbești cu blândețe.

Urmărește, de exemplu, pe parcursul a cinci zile reacțiile celor din jur și notează-ți-le. Ajustează-ți comportamentul, dar nu te lăsa păcălit(ă) de o simplă situație care nu a funcționat. Nu uita: încerci să dezvolți o metodă care să-ți fie de ajutor *în orice situație* — adică *în general*.

Încet-încet, fără să-ți dai seama, deja aplici o metodă de cercetare care se numește *raționamentul inductiv*: pornești de la observații particulare, specifice unor anumite cazuri, și încerci, de la ele, să obții o regulă generală.

Inducția, așadar, se bazează pe această trecere: PARTICULAR ⟶ GENERAL.

Totuși, pentru că vorbim despre o metodă științifică, faptul că funcționează în câteva situații nu este suficient. Așa că ai nevoie de o demonstrație. În experimentul nostru de socializare, e greu, dacă nu imposibil, să te gândești la ceva general valabil, așa că o să-ți arăt cum faci asta în situații de matematică.

Teoria

Raționamentul inductiv este metoda prin care demonstrezi ceva general după ce ai pornit prin câteva observații particulare. Este o unealtă excelentă pentru *metoda științifică*, fiindcă exact așa funcționează și cercetarea, fie ea teoretică sau pe bază de observații și experimente.

Pașii pentru o demonstrație prin inducție

- Iei câteva cazuri particulare (din experimente sau raționamente);
- Formulezi ceea ce crezi că este o regulă generală;
- Dacă reușești să demonstrezi regula, ai terminat!
- Dacă nu, o revizuiești, eventual de la început (iei noi date sau raționamente, poate ți-au scăpat cazuri relevante).

Inducția matematică funcționează în două etape, pe baza pașilor de mai sus. Mai întâi, *etapa de verificare*, unde testezi dacă formula sau regula pe care crezi că ai găsit-o funcționează măcar pentru câteva situații particulare. Apoi, *etapa de inducție* propriu-zisă, în care încerci să demonstrezi că mai poți adăuga încă o situație care funcționează.

Riguros, etapa de inducție înseamnă să presupui că o proprietate este adevărată pentru un anumit număr de cazuri, n, apoi să demonstrezi, pe baza acestei presupuneri, că adevărul se păstrează și dacă mai încerci încă un caz.

Cu siguranță ai văzut în manual notația $P(n) \to P(n+1)$, care transmite exact acest lucru: dacă proprietatea P funcționează pentru n elemente, atunci funcționează și pentru $n+1$.

Supliment informativ

În istoria logicii și a matematicii, așa a apărut inducția, prin ideea că mai poți adăuga încă o situație care să respecte o regulă descoperită.

Gândește-te, de altfel, și la verbul „a induce”, care arată că o proprietate, o stare a lucrurilor este extinsă, ajunge să se propage dincolo de limitele inițiale. La fizică, *curentul indus* este cel care apare în circuit din cauza efectelor magnetice. În limbajul comun, o întâmplare îți poate *induce* teamă sau, dimpotrivă, curaj, adică sentimente și emoții pe care nu le simțeai înainte.

Riguros vorbind, o mulțime sau o proprietate se numește *inductivă* dacă oricând poți să-i mai adaugi încă un element. Așa se definește mulțimea numerelor naturale ($\mathbb{N}$): ai adăugat pe $0, 1, 2, 3, \ldots$ și, oriunde te-ai opri, poți să mai adaugi încă un număr care să nu iasă din mulțime. De aceea, mulțimea numerelor naturale se numește inductivă și este și motivul pentru care inducția matematică se folosește doar în demonstrații care lucrează cu proprietăți indexate de numerele naturale (acele $P(n)$ pe care le formulezi).

E important, deci, ca proprietatea pe care o demonstrezi prin inducție să se bazeze pe cazuri care pot fi enumerate cu ajutorul numerelor naturale. De exemplu, atunci când poți vorbi despre *pasul* 1, *pasul* 2, *pasul* 3 și altele, atunci poți să lucrezi cu inducția. Dar, dacă lucrezi cu numere raționale sau întregi, atunci inducția nu mai funcționează, căci nu mai poți enumera situațiile pe care le verifici (nu are sens să vorbești despre „pasul 1,5” sau „pasul -0,2”).

Primul exemplu

Unul dintre cele mai simple exemple pentru care folosești inducția matematică este formula pentru suma primelor n numere naturale, numită și *suma lui Gauss*:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema se potrivește foarte bine pentru o demonstrație prin inducție, pentru că se bazează pe o proprietate adevărată pentru n numere. Mai mult, ai trecut deja peste etapa în care găsești tu formula generală: nu ai decât să o demonstrezi.

Notezi, așadar, proprietatea cu $P(n)$. În cuvinte, ea spune că pentru orice număr natural n, suma primelor n numere naturale are formula dată de $\frac{n(n+1)}{2}$.

Procedezi conform indicațiilor generale:

Etapa de verificare: Testezi dacă proprietatea este adevărată pentru primele câteva cazuri, $n=1,2,3$, adică verifici dacă $P(1), P(2), P(3)$ sunt adevărate:

- $P(1) : 1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, adevărat.
- $P(2) : 1+2=\frac{2\cdot(2+1)}{2}$, adevărat.
- $P(3) : 1+2+3=\frac{3\cdot(3+1)}{2}$, adevărat.

Etapa de inducție: Acum, că ai văzut că proprietatea este adevărată pentru câteva cazuri de început, demonstrezi esențialul, $P(n) \to P(n+1)$. Altfel spus, presupui că proprietatea este adevărată pentru n numere naturale și arăți că funcționează și când o aplici pentru încă unul, adică $P(n+1)$.

Scrii ce înseamnă $P(n+1)$ mai întâi:

$$P(n+1): \quad 1+2+3+4+\cdots+n+n+1=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar proprietatea nu este nouă: când o analizezi în context și ții cont că $P(n)$ este deja adevărată (conform presupunerii), îți dai seama că știi deja rezultatul sumei primilor n termeni. Rescrii și pui în evidență noutățile:

$$P(n+1): \quad \frac{n\cdot(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar, problema a ajuns la o simplă egalitate algebrică. Dacă înmulțești egalitatea cu 2, ajungi, succesiv:

$$\begin{aligned} n(n+1)+2(n+1)=(n+1)(n+2) \quad &\Leftrightarrow \\ n^2+n+2n+2=n^2+2n+n+2 \quad &\Leftrightarrow \\ n^2+3n+2=n^2+3n+2, \text{ adevărat.} \end{aligned}$$

Concluzia este că și proprietatea $P(n+1)$ este adevărată, deci ai demonstrat că mai poți adăuga încă un termen, adică exact esența inducției.

De ce este nevoie să verifici mai mult decât primul pas?

La etapa de verificare, este tentant să spui că, dacă funcționează pentru prima valoare a lui n (de obicei, $n = 0$ sau $n = 1$), atunci verificarea este terminată. Dar există o problemă celebră care îți arată că o astfel de concluzie este pripită.

Să presupunem că vrei să demonstrezi prin inducție propoziția: Toți *caii au aceeași culoare*. Pusă în forma clasică pentru o demonstrație prin inducție, ea s-ar putea scrie așa:

> $P(n)$: Orice mulțime de n cai conține animale de aceeași culoare, pentru orice număr natural n.

Iată cum ar putea arăta o „demonstrație" prin inducție.

- *Pasul de verificare*: pentru $n = 0$, mulțimea conține 0 cai, deci „toți" au aceeași culoare. La fel și pentru $n = 1$, când mulțimea conține un cal.
- *Pasul de inducție*: Presupui că orice mulțime de n cai conține animale de aceeași culoare și arăți că mai poți adăuga încă un cal, fără să încalci proprietatea. Poți să procedezi așa: scoți un cal din mulțimea de n despre care știi că au aceeași culoare și-l introduci pe cel suplimentar. Acum ai o altă mulțime de n cai, dar ipoteza de inducție spune că *orice* mulțime de n cai conține animale de aceeași culoare. Așa reușești să-l integrezi și pe cel nou, iar pe cel lăsat în afara mulțimii îl adaugi imediat, fiindcă deja avea aceeași culoare cu cei care se află acolo. Astfel, obții o mulțime de $n + 1$ cai, toți de aceeași culoare și propoziția este demonstrată.

Poate părea surprinzător, dar problema raționamentului *nu* este la pasul de inducție, ci la pasul de verificare. Am ales convenabil $n = 0$ și $n = 1$ când, practic, nu e nimic de demonstrat. Dacă voiam să verificăm că *orice* mulțime de doar 2 cai conține animale de aceeași culoare, aveam, desigur, o problemă și ne dădeam seama că propoziția nu poate să fie adevărată.

În concluzie, atunci când verifici o formulă care vrei să fie generală, nu alegi doar unul-două cazuri triviale.

O variație

Iată încă un exemplu, ușor diferit de primul. Demonstrăm formula:

$$P(n): \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru pasul de verificare:

- $P(1): 1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$, adevărat.

- $P(2) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$, adevărat.
- $P(3) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3}$, adevărat.

Apoi, pentru pasul de inducție, presupunem că am demonstrat deja proprietatea pentru n obiecte (adică $P(n)$ este adevărată) și arătăm că mai putem adăuga încă unul. Arătăm, deci, că $P(n) \to P(n+1)$.

Din nou, în scrierea lui $P(n+1)$ găsim deja rezultatul din $P(n)$. Am colorat cu roșu termenul nou din sumă:

$$P(n+1) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$
$$\text{(conform P(n))} : \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \iff$$
$$\text{(conform P(n))} : \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1) \cdot (n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Egalitatea se obține imediat dacă dai factor comun $(n+1)(n+2)$ și, după încă puțină prelucrare algebrică, ajungi la rezultatul dorit.

Probleme experimentale

Dacă știi rezultatul dintr-o formulă pe care o demonstrezi prin inducție, problema se reduce la o simplă verificare. Dar, de multe ori, trebuie să depui efort și ca să găsești formula.

Am numit această tehnică „experiment”, pentru că, asemenea cercetătorilor din laborator, mai întâi faci teste și experimente până ajungi la un rezultat pe care îl teoretizezi, apoi verifici dacă este cel general, căutat.

Descoperă o sumă

Iată această sumă:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mai întâi, e clar că situația se potrivește unui raționament inductiv, pentru că suma conține un număr arbitrar ($n \in \mathbb{N}^*$) de termeni. Deci, dacă am găsi o formulă care să o calculeze, am avea propoziția exprimată ca $P(n) : S_n =$ acea formulă.

Numai că formula nu este dată, așa că trebuie descoperită mai întâi. Să experimentăm cu câteva valori calcule particulare:

- Pentru $n = 1$, suma are un singur termen: $S_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$.
- Pentru $n = 2$, suma este $S_2 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} = S_2 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

- Pentru $n = 3$: $S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
- Pentru $n = 4$: $S_4 = S_3 + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.

Să ne uităm acum la legăturile pe care le-am obținut. Vrem să găsim o formulă care să depindă de n, așa că ne uităm la rezultatele sumelo în legătură cu n:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}, \quad n = 2 \Rightarrow \frac{2}{3}, \quad n = 3 \Rightarrow \frac{3}{4}, \quad n = 4 \Rightarrow \frac{4}{5}.$$

Observi că rezultatele sunt foarte aproape 1 și, ca valoare numerică, au o formă de tipul $\frac{k}{k+1}$, unde k este, de fiecare dată, *următoarea valoare* a lui n. Pare, deci, o regulă de tipul:

$$S_n = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mai rămâne de formulat proprietatea:

$$P(n) : S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Testează-ți cunoștințele și încearcă să demonstrezi proprietatea prin inducție.

Avantajul experimentelor de mai devreme este că am făcut deja patru pași de verificare, deci poți să treci direct la pasul de inducție.

O altă metodă prin care puteai ajunge la rezultat folosește o formulă cunoscută, în general, din gimnaziu. Dacă nu o știai, încearcă să o demonstrezi:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right), \forall n, k \in \mathbb{Z}^*.$$

În suma pe care o calculăm, avem cazul cel mai simplu, când $k = 1$, iar suma devine telescopică:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Din sumă rămân doar primul și ultimul termen, deci:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

rezultat care coincide cu ce am obținut și noi „experimental”.

Încă o sumă

Pe baza exemplului anterior, să complicăm un pic lucrurile și să calculăm:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Din nou, formula nu este dată, așa că trebuie descoperită experimental. Poți să încerci câteva calcule, dar poți și să prelucrezi termenul general.

Supliment informativ

Pentru simplitatea notației, dar și ca sa te obișnuiești cu tehnica prin care te concentrezi asupra termenului general, îți explic, pe scurt, notația cu ajutorul simbolului de sumare Σ (litera grecească *sigma* mare).

Logica acestei notații seamănă cu structurile repetitive din programare, mai exact, cu structura `for` (`pentru`). Dacă într-un program ai scrie `for i = 1 to n` (`pentru i de la 1 la n`), în matematică, notația este $\sum\limits_{i=1}^{n}$.

Într-un program, urmează una sau mai multe instrucțiuni care prelucrează variabila `i`, când aceasta ia valorile de la 1 la n. La fel și în matematică, urmează o formulă (regulă) care folosește variabila i, în timp ce aceasta ia valorile de la 1 la n.

Dar e o diferență între buclele din programare și sumele din matematică: dacă într-un program, o buclă `for` poate să facă orice operații în interiorul ei, în matematică, notația de sumare $\sum\limits_{i=1}^{n}$ doar adună termenii pe care îi specifici prin formula (regula) care urmează. În pseudocod, asta s-ar scrie așa:

```
pentru i de la 1 la n { suma := suma + expresie(i) }
```

În matematică, o notație de tipul $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)$, unde f este o funcție, înseamnă $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$: adună toți termenii de tipul $f(i)$, pentru fiecare i de la 1 la n.

Dacă ai înțeles cum funcționează notația de sumare, atunci e clar că este suficient să te concentrezi pe forma termenului general, adică pe acea regulă care îți arată termenii care se adună și cum depind ei de „contorul” i. În exercițiul pe care-l discutăm acum, poți scrie:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Avantajul (pe lângă notația mai comprimată) este că nu mai ai nevoie să te uiți la fiecare termen, pentru că în forma restrânsă îi ai deja pe toți: este suficient să dai valori lui k și obții orice termen din cei n ai fiecărei sume S_n.

Așa că, dacă prelucrezi termenul general, atunci automat ideea se va aplica oricărei valori particulare a lui.

În suma noastră, uite un truc prin care poți reduce la cazul anterior:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{(k+1)-k}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k+1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{k}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right).\end{aligned}$$

Acum observi că ai descompus termenul general în câte două sume, care devin telescopice atunci când k ia valorile de la 1 la n.

Testează-ți cunoștințele și găsește formula, apoi demonstrează-o prin inducție. Dar observă că, din moment ce am lucrat direct cu formula generală (cea cu k) și nu am mai luat cazuri particulare, nu mai poți sări peste pașii de verificare.

Compară expresii numerice

Uite încă o aplicație a inducției, ca să vezi că nu e folositoare doar pentru sume.

Ordonează crescător numerele, definite pentru orice valoare $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a = \frac{2n\sqrt{n+1}}{3}, \quad b = \frac{2(n+1)(\sqrt{n})}{3}, \quad c = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Comparația între a și b e simplă, pentru că sunt definite de formule finale, care nu necesită calcule. Ne uităm pas cu pas:

$$\begin{array}{rcll} a & ? & b & \\ \dfrac{2n\sqrt{n+1}}{3} & ? & \dfrac{2(n+1)\sqrt{n}}{3} & \Big|\,\text{înmulțești cu } \dfrac{3}{2} \\ n\sqrt{n+1} & ? & (n+1)\sqrt{n} & \Big|\,\text{ridici la pătrat} \\ n^2 \cdot (n+1) & ? & (n+1)^2 \cdot n & \Big|\,\text{desfaci parantezele} \\ n^3 + n^2 & ? & (n^2+2n+1)\cdot n & \Big|\,\text{calculezi în dreapta} \\ \Rightarrow n^3 + n^2 & < & n^3 + 2n^2 + n & \end{array}$$

de unde e clar că $a < b$.

Dar nu e la fel de simplu pentru numărul c, pentru că el se exprimă printr-o regulă care invită la calcul. Dar nici nu e nevoie să găsești o formulă generală pentru c. Problema cere să-l compari cu a și b, așa că ne putem concentra pe asta. Ne uităm la câteva cazuri:

- Pentru $n = 1$: $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}, b = \frac{4}{3}, c = 1$. Știi că $a < b$, iar c se plasează între ele, deci $a < c < b$ aici.

- Pentru $n = 2$: $a = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $b = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$, iar $c = 1 + \sqrt{2}$. Aici e nevoie să faci un calcul aproximativ. Cum $\sqrt{2} \simeq 1,41$, obții că $a \simeq 1,88$, apoi $b \simeq 2,82$, iar $c \simeq 2,41$, deci $a < c < b$ din nou.

Mai poți încerca și pentru $n = 3$, dar devine clar că ordinea este aceasta: $a < c < b$. Așa că rămâne să demonstrezi prin inducție *cele două* inegalități: $a < c$ și $c < b$.

Ești iar în situația când experimentul de mai sus te scutește de pasul de verificare, așa că poți să treci direct la pasul de inducție.

Mai precis, cum $a < c < b$ înseamnă, pentru cazul n, că:

$$\frac{2n\sqrt{n+1}}{3} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2(n+1)\sqrt{n}}{3}.$$

Asta este ipoteza de inducție. Pe ea o poți folosi ca să demonstrezi cazul corespunzător lui $n + 1$, adică:

$$\frac{2(n+1)\sqrt{n+2}}{3} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \frac{2(n+2)\sqrt{n+1}}{3}.$$

Dar suma primilor n radicali din c se încadrează între valorile lui a și b calculate pentru n, deci mai rămâne să arăți că:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \frac{2(n+1)\sqrt{n}}{3} + \sqrt{n+1} < \frac{2(n+2)\sqrt{n+1}}{3} \quad \text{și}$$
$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > \frac{2n\sqrt{n+1}}{3} + \sqrt{n+1} > \frac{2(n+1)\sqrt{n+2}}{3}$$

După ce elimini numitorii și faci câteva prelucrări algebrice, ajungi la rezultat, așa că-ți las finalizarea demonstrației ca exercițiu.

Divizibilitate

Mai poți folosi inducția și în exerciții cu divizibilitate. Totul este să poți exprima proprietatea de demonstrat ca o propoziție $P(n)$, cu n un număr natural.

Uite încă un exemplu atipic. Definim numerele:

$$a_n = 5^{n+3} + 11^{3n+1} \quad \text{și} \quad b = 17,$$

apoi proprietatea $P(n) : b \mid a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Urmează să o demonstrăm prin inducție.

Testăm pe câteva cazuri, ocazie cu care facem pasul de verificare:

- $P_0 : b \mid a_0$, adică $17 \mid 5^{0+3} + 11^{0+1} = 136$, care este adevărată, pentru că $136 = 17 \cdot 8$;
- $P_1 : b \mid a_1$, adică $17 \mid 5^{1+3} + 11^{3+1} = 15266$, adevărată și ea, pentru că $15266 = 17 \cdot 898$.

Așa că mai rămâne pasul de inducție, $P(n) \to P(n+1)$. Altfel spus, presupunem că $17 \mid a_n$ și vrem $17 \mid a_{n+1}$.

Dar iată o prelucrare simplă:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5^{n+4} + 11^{3(n+1)+1} \\ &= 5 \cdot 5^{n+3} + 11^3 \cdot 11^{3n+1} \\ &= 5 \cdot 5^{n+3} + 5 \cdot 11^{3n+1} + (11^3 - 5) \cdot 11^{3n+1} \\ &= 5 \cdot \left(5^{n+3} + 11^{3n+1}\right) + 1326 \cdot 11^{3n+1}. \end{aligned}$$

Paranteza apărută corespunde numărului a_n, despre care știi deja că este divizibil cu 17, iar al doilea termen conține factorul 1326, care este $17 \cdot 78$. Deci a_{n+1} este o sumă de două numere, ambele divizibile cu 17 și am terminat.

Exercițiu: Testează-ți acum cunștințele și demonstrează prin inducție:

$$P(n) : b \mid a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{unde} \quad a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}, b = 133.$$

O aplicație în geometrie

Uite încă o aplicație potrivită pentru inducție la care poate nu te așteptai:

> Câte diagonale are un poligon convex cu n laturi ($n \geq 3$)?

Problema pare că se potrivește situațiilor experimentale pe care le-am discutat mai devreme. Nu avem un rezultat cunoscut pe care să-l demonstrăm și va trebui să facem câteva teste.

Mai întâi, să stabilim ce se înțelege prin „diagonală”: este un segment care se trasează între două vârfuri ale poligonului care nu sunt consecutive. Vârfurile consecutive sunt unite de *laturi*, iar cele neconsecutive, de *diagonale*.

Primul poligon ar fi triunghiul, deci $n = 3$, doar că triunghiul nu are diagonale, pentru că toate vârfurile sunt consecutive. Dar problema zice să începem cu cazul $n = 3$, deci, dacă notăm cu d_n numărul de diagonale ale unui poligon convex cu n laturi, avem, pentru început, $d_3 = 0$.

Mai departe, $n = 4$. Un patrulater are două diagonale. Gândește-te la pătrat, dreptunghi, paralelogram sau orice alt patrulater, regulat sau nu. Fiecare vârf este unit cu încă două vârfuri ca să formeze laturi, așa că, pentru fiecare vârf, mai rămâne încă unul cu care formează o diagonală.

Dacă vizualizezi, de exemplu, un pătrat ABCD, atunci AB și AD sunt laturi, deci singura diagonală posibilă din A este AC. La fel, BD, diagonală din B. Când ajungi la vârfurile C și D, ar trebui să numeri din nou diagonalele CA și DB, doar că ele sunt deja luate în calcul. Deci $d_4 = 2$.

Pentru pentagon, $n = 5$: poți să desenezi (vezi și Figura 1) sau poți să încerci să aplici raționamentul de la patrulater. Fiecare vârf se unește cu două vârfuri vecine și formează o latură, așa că rămân încă două vârfuri pentru diagonale. În total, ai 5 vârfuri, deci ar fi $5 \cdot 2$ diagonale. Numai că, la fel ca la pătrat, toate diagonalele au fost numărate de două ori. Deci răspunsul este, de fapt, $d_5 = 5$.

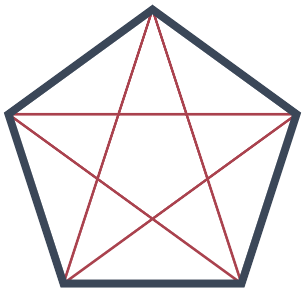

Figura 1: Un pentagon regulat și cele 5 diagonale ale sale

Se întrevede regula generală: dacă poligonul are n laturi, din fiecare dintre cele n vârfuri poți să duci câte $n-3$ diagonale (scazi 2 pentru vârfurile vecine, care formează laturi și încă 1 pentru vârful însuși, care nu formează niciun segment). Dar toate diagonalele sunt numărate de două ori, deci ar părea că formula este $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Experimentele pentru triunghi, pătrat și pentagon confirmă formula. Mai rămâne să o demonstrăm în general.

Principala provocare este să te gândești cum faci trecerea de la un poligon cu n laturi la unul cu $n+1$ laturi și ce impact are asta asupra numărului de diagonale.

Să mai adaugi încă un vârf e simplu: alegi o latură din poligonul inițial, adaugi un vârf deasupra ei, astfel încât să obții un triunghi, după care ștergi latura inițială. Vezi situația în Figura 2.

Impactul asupra numărului de diagonale este că faci disponibil încă un vârf, care formează diagonale cu toate celelalte. Acum ai $n+1$ vârfuri, deci poți să trasezi $n+1-3$ diagonale noi, plus încă una: latura eliminată când ai adăugat vârful nou (care devine, acum, diagonală).

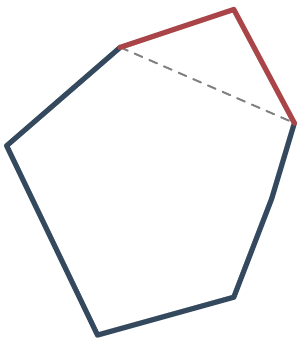

Figura 2: Adăugarea unei noi laturi (cu roșu) într-un poligon. Latura veche (punctată) devine diagonală

Așadar, raționamentul te conduce la acest calcul:

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2},$$

adică exact valoarea așteptată și am terminat demonstrația.

Exersează și tu

1. Formulează propozițiile $P(n)$ și demonstrează prin inducție (găsește tu valorile permise pentru n):

(a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$;

(c) $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots + (-1)^{n-1}n^4 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$.

2. Experimentează, găsește formula generală și demonstreaz-o prin inducție ca să calculezi (găsește și valorile permise pentru n):

(a) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1)$;

(b) $1 \cdot 1,(3) + 2 \cdot 2,(3) + \cdots + n\left(n + \frac{1}{3}\right)$;

(c) $3^2 - 1^2 + 5^3 - 4^2 + \cdots + (2n+1)^3 - (3n-2)^2$.

3. Demonstrează prin inducție:

(a) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $13 \mid 2 \cdot 4^{2n+1} + 45 \cdot 3^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(c) $2^{m+2} \mid (2n+1)^{2^m} - 1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

4*. Similar cu problema de geometrie, îți propun încă o aplicație mai puțin întâlnită pentru inducție.

Demonstrează că orice sumă mai mare sau egală cu 5 lei poate fi plătită folosind numai monede de 2 lei și 3 lei.

Testează pe câteva cazuri, formalizează ca $P(n)$, găsind și valorile permise pentru n, apoi demonstrează prin inducție.