Ecuația tangentei la graficul unei funcții

Adrian Manea

Curbele sunt forme naturale, pentru că ai multe exemple în jur care nu sunt făcute din colțuri și linii drepte. Dar una este să intuiești ce înseamnă o curbă, să o poți recunoaște vizual și cu totul altceva să o descrii riguros, matematic.

Tehnologia digitală, de exemplu pixelii de pe ecran, te ajută să înțelegi că o curbă se obține, de fapt, prin bucățele foarte mici, fragmente de dreaptă, practic. Cu cât fragmentele sunt mai mici și mai multe, cu atât aproximația este mai bună.

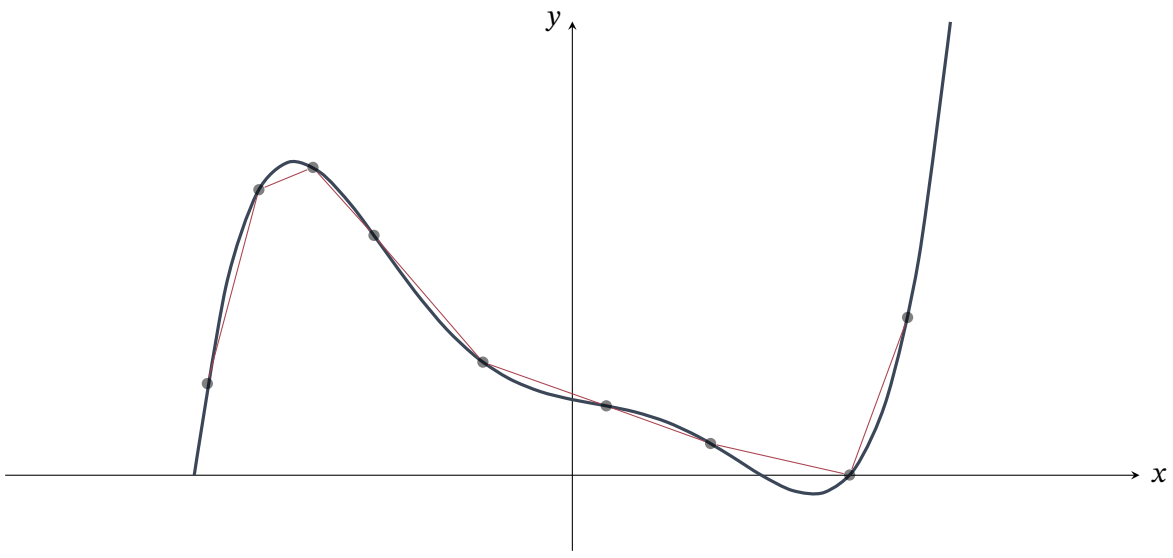


Figura 1: Curba asociată unei funcții și puncte diverse luate pe ea, care o aproximează liniar

Și pentru că în matematică poți să spui că ai *o infinitate* de fragmente, de lungime *infinitezimală*, adică „infinit de mică”, ajungi la descrierea (aproape) riguroasă a unei curbe.

Dar înțelegerea intuitivă, rudimentară din acele fragmente de dreaptă îți dau o noțiune foarte importantă și încă relevantă, chiar și după ce ai văzut cum se obține o curbă. Vechile fragmente pe care le-ai folosit când ai trasat curba sunt *tangente* la curba respectivă, în puncte intermediare. Cum o dreaptă este reprezentarea grafică a unei funcții de gradul întâi sau *liniare*, poți să vezi *tangentele ca aproximații liniare ale curbelor*. Curba devine, așadar, o „șlefuire la infinit” a unei linii alcătuite din tot mai mici și mai multe segmente de dreaptă.

Problema ecuației tangentei la o curbă se pune din mai multe motive, nu doar al desenului. Ideea că o tangentă aproximează o curbă într-o vecinătate suficient de mică a punctului de intersecție (de tangență) devine și mai folositoare când înțelegi că ea modelează viteza cu care se schimbă mărimea reprezentată de curbă.

Tangenta, derivata și viteza de schimbare

Până în preajma secolelor XVII-XVIII, când au trăit Isaac Newton și Gottfried W. Leibniz, fizica nu avea o metodă riguroasă și precisă pentru calculul *vitezei instantanee*. Problema este la baza mecanicii clasice, pe care astăzi o înveți în clasa a IX-a. Iar fundamentele ei matematice au fost puse tot de Newton, care a arătat cum poți folosi analiza matematică ca să înțelegi variația unei mărimi. De exemplu, variația poziției în spațiu a unui corp, care îți arată viteza sau variația vitezei, care îți arată accelerația.

În general, variația unei mărimi înseamnă pur și simplu diferența dintre valoarea ei la un moment considerat final și cea de la momentul considerat inițial (sau de referință). Dacă vrei să vezi variația temperaturii într-o zi, de dimineață până la prânz, să spunem, calculezi diferența dintre temperatura la ora 13.00 și cea de la ora 7.00.

Diferențele de tipul acesta se numesc *variații absolute* și se notează, în fizică, prin Δ. Scrii $\Delta x = x_{\text{final}} - x_{\text{inițial}}$ când vrei să arăți variația poziției pe orizontală (x).

Numai că variația absolută nu dă nicio indicație despre ce s-a întâmplat pe parcurs. Dacă, atunci când calculezi variația temperaturii într-o zi, obții doar 2 grade Celsius, să spunem, vei deduce că temperatura de la ora 13.00 este doar cu 2 grade mai mare decât cea de la ora 07.00. Dar dacă între timp a plouat? Sau mare parte din timp a fost înnorat, a bătut vântul și soarele a ieșit doar după ora 11.00? Uitându-te doar la două valori, inițială și finală, înțelegi doar diferența lor, nu și modul în care s-a ajuns de la prima la a doua, eventuale creșteri sau descreșteri rapide de pe parcurs, care s-au echilibrat sau modificări bruște, dar

într-un interval foarte scurt.

Tocmai de aceea, este necesar să poți calcula și *variația instantanee*, adică ce se întâmplă acum, într-un interval de timp foarte mic, atât de mic încât nu e potrivit să calculezi cu Δ, fiindcă ai obține (aproape) zero.

De exemplu, pentru graficul funcției $f(x) = \sin x$ (Figura 2), dacă te uiți pe un interval de forma $[0, \pi]$, pare că nu se întâmplă nimic, fiindcă $f(0) = f(\pi)$, deci valoarea inițială este egală cu cea finală. Un astfel de calcul surprinde două momente doar și, dacă nu sunt bine alese, nu afli nimic despre *comportamentul intermediar*.

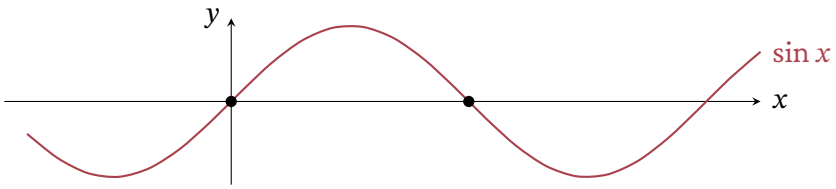


Figura 2: Graficul funcției $f(x) = \sin x$, cu valorile egale marcate $f(0) = f(\pi) = 0$

Pentru calcule instantanee, la fizică ți s-a explicat că e nevoie să calculezi o limită, în care intervalul de timp este aproape zero. De exemplu, fiindcă viteza este calculată ca variația poziției în timp, un calcul precum:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

îți arată doar *viteza medie*, pentru că folosește variații absolute și nu îți poate arăta ce s-a întâmplat pe parcurs, ci doar diferența dintre momentul final și cel inițial.

Așa că profesorul de fizică îți poate explica despre necesitatea lucrului cu un interval de timp aproape de zero, iar raportul acesta devine un calcul la limită:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

metodă cu care calculezi *viteza instantanee*. Iar dacă îți amintești că poziția x este dată de o lege de mișcare sub forma unei funcții $x(t)$, poți să scrii:

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Și fiindcă această limită se poate calcula oricând ai fixat un moment t_0 la care te raportezi, rezultă că ea returnează o *funcție de t*, pe care ai notat-o cu $v'(t)$. A fost, probabil, prima întâlnire cu noțiunea de *derivată a unei funcții*, cu mult înainte de studiul riguros de la matematică.

Construcția asta e fix ce-ți trebuie ca să înțelegi motivația practică, fizică, a funcțiilor derivate. Metoda matematică vine în completare, pe baza reprezentării grafice.

Definiția funcției derivate, așa cum este introdusă la matematică, se bazează pe limita de mai sus, din cazul vitezei, doar că într-un context mai abstract[1].

Începem, deci, cu o funcție reală, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pentru un punct arbitrar $x_0 \in D$, se definește derivata funcției f în x_0, notată $f'(x_0)$ prin[2]:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Această limită își arată adevărata față atunci când o interpretezi cu ajutorul reprezentării grafice.

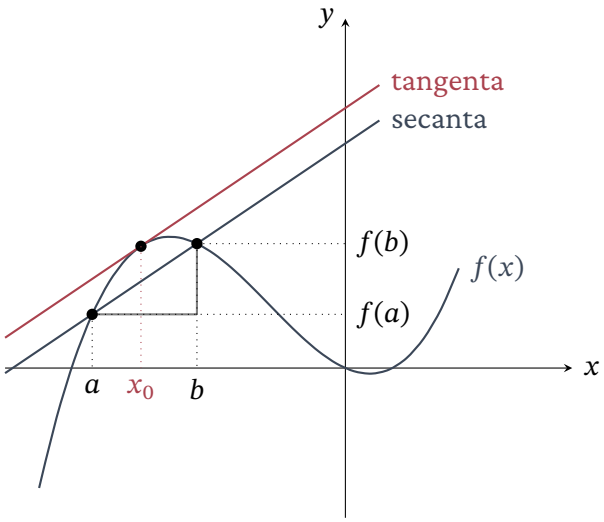


Figura 3: Tangenta la grafic și o secantă

Să zicem că ai graficul funcției în Figura 3 de mai sus și trasezi o secantă la grafic, astfel încât punctul x_0 fixat arbitrar[3] să fie între punctele de intersecție dintre secantă și grafic.

[1] Analiza matematică de clasa a XI-a începe cu un context mult mai riguros decât voi expune aici. Punctele de acumulare, șiruri de numere reale, noțiunea de limită, șiruri convergente, criterii de caracterizare a convergenței și altele sunt noțiuni pe care se bazează construcția limitei unei funcții într-un punct. Dar, pe de o parte, le voi presupune cunoscute pentru ce avem nevoie aici și, pe de alta, cred că toate noțiunile cuprinse aici pot fi înțelese și în lipsa unei parcurgeri riguroase a primei părți din materia de analiză de clasa a XI-a.

[2] Aici ar trebui să presupunem că funcția are anumite proprietăți convenabile, care să asigure că limita aceasta este finită sau altfel, să lucrăm cu limite laterale. Însă pentru scopul pe care mi l-am propus aici, voi insista doar pe cazurile care nu necesită astfel de precauții, adică funcția nu prezintă anomalii care să conducă la derivate infinite sau inexistente. Pentru asta, este suficient să presupunem că toate funcțiile pe care le vom discuta sunt *continue* pe întreg domeniul de definiție.

[3] Fixarea arbitrară a unui punct sau număr înseamnă că îl alegem arbitrar, adică „la întâmplare”, fără vreo condiție anume sau metodă, însă, odată ales, el rămâne fixat pe parcursul întregii discuții.

Dacă duci paralele la axele de coordonate prin punctele de intersecție dintre secantă și graficul funcției, obții un triunghi dreptunghic, care are drept ipotenuză segmentul determinat de intersecția secantei cu graficul. Să zicem că abscisele celor două puncte de intersecție sunt $x = a$ și $x = b$, iar ordonatele, $f(a)$ și $f(b)$. Să ne uităm la ce calculează un raport precum cel din definiția derivatei:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{tg}\alpha,$$

unde α este unghiul pe care îl face ipotenuza-secantă cu cateta paralelă la axa Ox. Dar, din geometria de bază, acest unghi este congruent cu unghiul pe care îl face *dreapta secantă cu axa Ox*, ca unghiuri corespondente (date de paralela la axa Ox, axa Ox și secanta la grafic, care devine secantă și pentru această pereche de drepte paralele).

Însă tangenta unghiului pe care îl face o dreaptă cu axa Ox este panta acestei drepte. Rezultă, deci, că raportul sus-menționat calculează *panta secantei la grafic*.

De menționat că ar fi fost posibil ca secanta să fie o dreaptă cu pantă negativă, caz în care ar fi determinat un unghi obtuz cu axa Ox, și atunci, raportul de mai sus nu mai calculează chiar $\text{tg}(\alpha)$, cu $\text{tg}(\pi - \alpha)$, care este egal cu $-\text{tg}(\alpha)$. Dar această situație este convenabilă, pentru că, în cazul respectiv, $f(b) < f(a)$, deci raportul are valoare negativă oricum, egală în modul cu cazul celălalt.

Definiția derivatei mai implică și o limită. Dacă ne gândim acum că $x_0 = b$ și pornim de la $x = a$ către x_0, secanta ajunge să determine un triunghi dreptunghic cu o ipotenuză cât mai mică, până când, la limită, $x = x_0$ și ipotenuza este redusă la un punct. Atunci, *secanta devine tangentă*, iar ipotenuza, punctul de tangență. Situația, pas cu pas, când o secantă tinde să devină tangentă, este ilustrată în Figura 4.

Raportul respectiv calculează tot panta acestei drepte, însă, fiindcă expresia nu s-a schimbat. Rezultă, deci, că la limită, când $x \to x_0$, limita respectivă, adică $f'(x_0)$ ajunge să calculeze panta tangentei la graficul funcției în punctul x_0.

Aici este rezultatul-cheie, așa că merită evidențiat separat.

Derivata într-un punct este panta tangentei

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și un punct arbitrar $x_0 \in D$, valoarea funcției derivate în punctul x_0, adică $f'(x_0)$, este panta dreptei tangente la graficul funcției în punctul respectiv.

Odată înțeles acest lucru, problema pe care ne-am propus-o la început, cea de găsirea

ecuației tangentei la graficul funcției, este mai mult de jumătate rezolvată.

Iată un exemplu.

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x + 1$. Să găsim ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x_0 = -1$.

Orice tangentă este o dreaptă, deci trebuie să aibă o ecuație generală de forma $y = ax+b$. Ca să determinăm dreapta, trebuie să găsim a și b.

Dar a este chiar panta dreptei tangente, deci, în baza observațiilor anterioare, $a = f'(-1)$. Calculăm derivata în general și apoi:

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(-1) = -2 = a.$$

Pentru valoarea lui b, să ne amintim că rezolvăm, de fapt, o problemă de intersecție între două curbe: graficul funcției f și dreapta tangentă. Punctul lor de intersecție este punctul de tangență, despre care știm că are abscisa $x_0 = -1$. Atunci ordonata lui se poate calcula atât prin funcția f, cât și prin ecuația dreptei tangente, căci punctul se află pe amândouă. Deci $f(x_0) = f(-1) = 5$, adică punctul de tangență este $T(-1, 5)$.

El se găsește și pe dreapta tangentă, deci:

$$5 = (-2) \cdot (-1) + b \Rightarrow b = 3.$$

Rezultă că ecuația tangentei este $y = -2x + 3$.

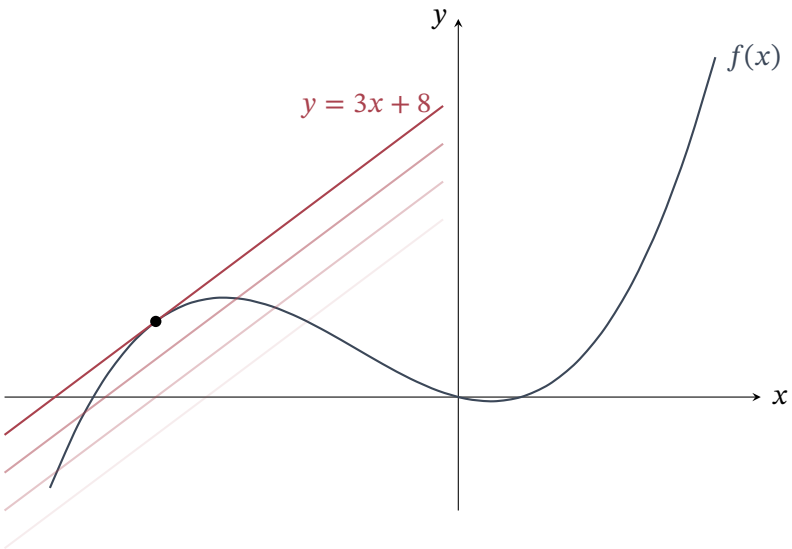


Figura 4: Tangenta la grafic, obținută prin rafinarea secantei

Vizual, Figura 5 arată graficul funcției și tangenta calculată.

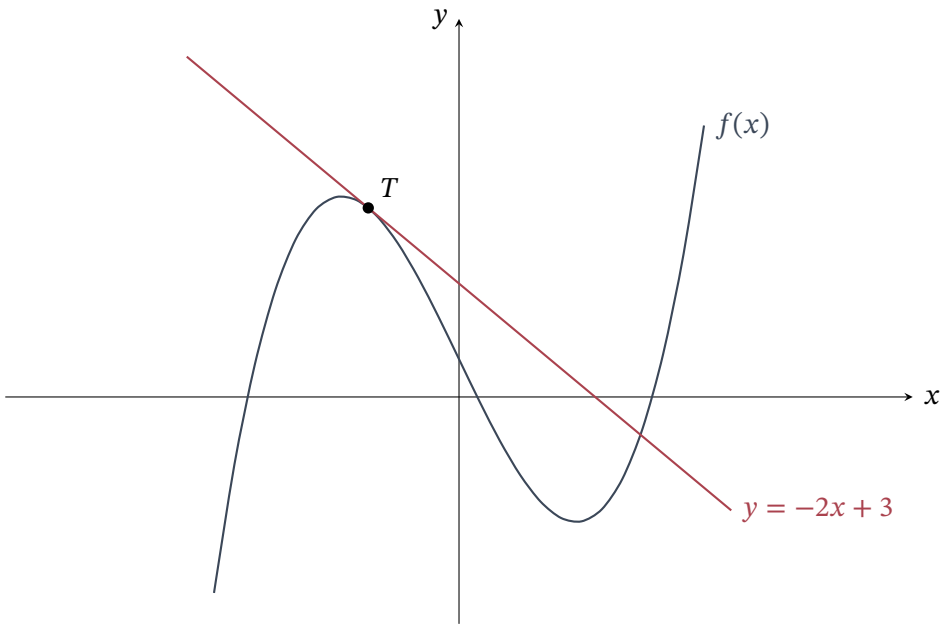


Figura 5: Tangenta la graficul funcției din exemplu

Dacă înțelegi ecuația dreptei tangente pe componente și în special rolul pantei acesteia, poți să rezolvi și exerciții mai sofisticate, ca acesta.

Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln^2 x - x \ln x$.
Găsiți abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox. (Model MEN 2025)

Axa Ox este o dreaptă orizontală, deci are panta 0. Așadar, problema cere abscisele (adică valorile lui x) corespunzătoare punctelor unde panta tangentei la grafic ar fi orizontală. Însă panta tangentei într-un punct este dată de valoarea funcției derivate în punctul respectiv. Cu alte cuvinte, problema cere să găsim x astfel încât $f'(x) = 0$, ceea ce se poate rezolva algebric, de îndată ce interpretarea este clară.

Derivata este: $f'(x) = 1 + 2 \ln x \cdot \dfrac{1}{x} - \ln x - 1 = \ln x \left(\dfrac{2}{x} - 1 \right)$.

Ca să anulăm derivata, trebuie fie ca $\ln x = 0$, fie $\dfrac{2}{x} - 1 = 0$. Din primul caz obținem $x = 1$, iar din al doilea, $x = 2$. Acestea sunt abscisele punctelor în care tangenta la graficul funcției ar fi orizontală, deci paralelă cu axa Ox.

Tot pe baza noțiunilor despre ecuația dreptei, în cazul particular când este vorba despre dreapta tangentă la graficul unei funcții se rezolvă și exercițiul următor.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)$.
Arătați că tangenta la graficul funcției în punctul $(-1, f(-1))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x-y+2=0$. (Simulare Covasna 2025)

Ordonata punctului de tangență nu este importantă, deci nu este nevoie să calculăm $f(-1)$. Avem în vedere două lucruri: știm abscisa punctului de tangență, $x=-1$, deci vom putea calcula panta tangentei acolo, iar aceasta este singura informație utilă, căci condiția de perpendicularitate a două drepte se scrie doar cu ajutorul pantelor.

Așadar, panta tangentei în $x=-1$ este $f'(-1)$ și, în general:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}.$$

Nu este nevoie să prelucrăm mai mult, pentru că, înlocuind $x=-1$, calculele se vor ușura. Deci:

$$f'(-1)=\frac{-1}{\sqrt{4}}-\frac{1+\dfrac{-1}{\sqrt{4}}}{-1+\sqrt{4}}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1.$$

Panta tangentei la graficul funcției în punctul $(-1, f(-1))$ este -1.

Cealaltă dreaptă dată trebuie prelucrată puțin, ca să-i găsim panta:

$$x-y+2=0\iff y=x+2,$$

deci are panta 1. Condiția de perpendicularitate a două drepte este ca produsul pantelor lor să fie -1, ceea ce în cazul nostru se verifică și am terminat.

Închei cu un exercițiu care depășește nivelul clasei a XI-a, însă a fost dat la simularea pentru bacalaureat din 2026 și, cel puțin printre elevii cu care am discutat, a stârnit nedumeriri.

Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(4x+\frac{6}{x^2}\right)\cdot\ln x$.

Determinați primitiva $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care axa Ox este tangentă la graficul funcției F.

Putem începe cu informațiile despre tangentă: faptul că axa Ox este tangentă la graficul funcției F înseamnă că în punctul sau punctele de tangență, derivata lui F este nulă. Dar, din faptul că F este primitiva (numită și *antiderivata*) lui f rezultă că $F'(x)=f(x)$, deci înseamnă că $f(x)$ se anulează în punctele de tangență.

Atunci rezultă că fie $\ln x=0$, adică $x=1$, fie $4x+\frac{6}{x^2}=0$, adică $4x^3+6=0$, de unde am obține o soluții negative, care nu se găsesc în domeniul de definiție. Rămâne că punctul de tangență este $x=1$ și deci $F'(1)=f(1)=0$.

Însă această informație nu este utilă când vrem să determinăm funcția F. Pentru asta, trebuie să folosim punctul de tangență, $(1,0)$, care se găsește pe graficul lui F, adică $F(1)=0$. Abia această relație va fi utilă în calculul lui F.

Acum integrăm:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)dx\\&=\int 4x\ln xdx+\int\frac{6}{x^2}\ln xdx\\&=2x^2\ln x-\int 2xdx-\frac{6}{x}\ln x+\int\frac{6}{x^2}dx\\&=2x^2\ln x-x^2-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+\mathcal{C},\end{aligned}$$

calculate cu metoda integrării prin părți.

Din condiția $F(1)=0$, rezultă $F(1)=-1-6+\mathcal{C}=0$, adică $\mathcal{C}=7$.

Concluzie: $F(x)=x^2(2\ln x-1)-\frac{6}{x}(\ln x-1)+7$.